〔2〕 三角形に関する条件 p, q, r を次のように定める。

p：三つの内角がすべて異なる

q：直角三角形でない

r：45° の内角は一つもない

条件 p の否定を $\overline{p}$ で表し，同様に $\overline{q}$, $\overline{r}$ はそれぞれ条件 q, r の否定を表すものとする。

(1) 命題「$r \Longrightarrow$ (p または q)」の対偶は「 $\boxed{\text{ク}}$ $\Longrightarrow \overline{r}$」である。

$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ (p かつ q)　　① ($\overline{p}$ かつ $\overline{q}$)

② ($\overline{p}$ または q)　　③ ($\overline{p}$ または $\overline{q}$)

(2) 次の⓪～④のうち，命題「(p または q) $\Longrightarrow r$」に対する反例となっている三角形は $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ の解答の順序は問わない。

⓪ 直角二等辺三角形

① 内角が 30°，45°，105° の三角形

② 正三角形

③ 三辺の長さが 3，4，5 の三角形

④ 頂角が 45° の二等辺三角形

(3) r は (p または q) であるための $\boxed{\text{サ}}$。

$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(2)

（p またはq）を満たす三角形で$\overline{r}$ であるもの，

すなわち，「45°の内角が少なくとも一つある三角形」を選ぶ。

(3)

$p \cup q$ ならばr は(2)より偽であるから，

r ならば$p \cup q$ の真偽を判定すればよい。

しかし，この真偽を直接判定するのは困難なので，

この対偶をとって，その真偽を判定する。

つまり，$\overline{p \cup q}$ ならば$\overline{r}$ の真偽を判定する。

ここで，$\overline{p \cup q} \equiv \overline{p} \cap \overline{q}$ より，三つの内角の少なくとも二つが同じかつ直角三角形

よって，$\overline{p \cup q}$ を満たす三角形は直角二等辺三角形である。

これと$\overline{r} \equiv$「45°の内角が少なくとも一つある。」より，$\overline{p \cup q} \Rightarrow \overline{r}$

よって，$r \Rightarrow p \cup q$

ゆえに，r は（p またはq）であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

数学Ｉ・数学A

第2問 (配点 25)

座標平面上にある点Pは，点A$(-8, 8)$から出発して，直線$y=-x$上をx座標が1秒あたり2増加するように一定の速さで動く。また，同じ座標平面上にある点Qは，点PがAを出発すると同時に原点Oから出発して，直線$y=10x$上をx座標が1秒あたり1増加するように一定の速さで動く。出発してからt秒後の2点P，Qを考える。点PがOに到達するのは$t=\boxed{\text{ア}}$のときである。以下，$0<t<\boxed{\text{ア}}$で考える。

(1) 点Pとx座標が等しいx軸上の点をP′，点Qとx座標が等しいx軸上の点をQ′とおく。△OPP′と△OQQ′の面積の和Sをtで表せば

$$S=\boxed{\text{イ}}t^2-\boxed{\text{ウエ}}t+\boxed{\text{オカ}}$$

となる。これより$0<t<\boxed{\text{ア}}$においては，$t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$で$S$は最小値$\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$をとる。

(数学Ｉ・数学A第2問は次ページに続く。)

次に，a を $0 < a < \boxed{\text{ア}} - 1$ を満たす定数とする。以下，$a \leqq t \leqq a+1$ における S の最小・最大について考える。

(i)　S が $t = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小となるような a の値の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(ii)　S が $t = a$ で最大となるような a の値の範囲は $0 < a \leqq \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(2)　3点O，P，Qを通る2次関数のグラフが関数 $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものになるのは，$t = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のときであり，x 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ だけ平行移動すればよい。

(1)

(ⅰ)

S の軸 $t=\dfrac{8}{7}$ が $a\leq\dfrac{8}{7}\leq a+1$ を満たせばよいから，$\dfrac{1}{7}\leq a\leq\dfrac{8}{7}$

(ⅱ)

定義域の中点 $\dfrac{a+(a+1)}{2}=a+\dfrac{1}{2}$ であるから，S の軸 $t=\dfrac{8}{7}$ が $a+\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{8}{7}$ を満たせばよい。

これと $a>0$ より，$0<a\leq\dfrac{9}{14}$

(2)

$y=2x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動した関数は $y=2(x-a)^2+b$ と表せる。
これが原点 O を通るから，$0=2(0-a)^2+b$　$\therefore b=-2a^2$
よって，$y=2(x-a)^2+b$ は，$y=2x^2-4ax$ と変形できる。
これが $\mathrm{Q}(t,10t)$ を通るから，$10t=2t^2-4at$
これと $t\neq0$ より，$4a=2t-10$
よって，$y=2x^2-4ax$ はさらに，$y=2x^2-2(t-5)x$ と変形できる。
これが $\mathrm{P}(-8+2t,8-2t)$ を通るから，
$8-2t=2(-8+2t)^2-2(t-5)(-8+2t)$
$\therefore 2t^2-13t+20=0$

これと $0<t<4$ より，$t=\dfrac{5}{2}$

$4a=2t-10$ より，$4a=-5$　$\therefore a=-\dfrac{5}{4}$

$b=-2a^2$ より，$b=-\dfrac{25}{8}$

数学Ⅰ・数学A

第3問 （配点 30）

点Oを中心とする半径3の円Oと，点Oを通り，点Pを中心とする半径1の円Pを考える。円Pの点Oにおける接線と円Oとの交点をA，Bとする。また，円Oの周上に，点Bと異なる点Cを，弦ACが円Pに接するようにとる。弦ACと円Pの接点をDとする。このとき

$$\mathrm{AP} = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}}, \qquad \mathrm{OD} = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。さらに，$\cos\angle\mathrm{OAD} = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$\mathrm{AC} = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。）

(1) 円Oの周上に，点Eを線分CEが円Oの直径となるようにとる。△ABCの内接円の中心をQとし，△CEAの内接円の中心をRとする。このとき，

$QR = \dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。したがって，内接円Qと内接円Rは $\boxed{\text{ニ}}$。

$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 内接する　　① 異なる2点で交わる

② 外接する　　③ 共有点を持たない

(2) $AQ = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ であるから，$PQ = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヒフ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ となる。

したがって，$\boxed{\text{ホ}}$。

$\boxed{\text{ホ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 点Pは内接円Qの周上にある

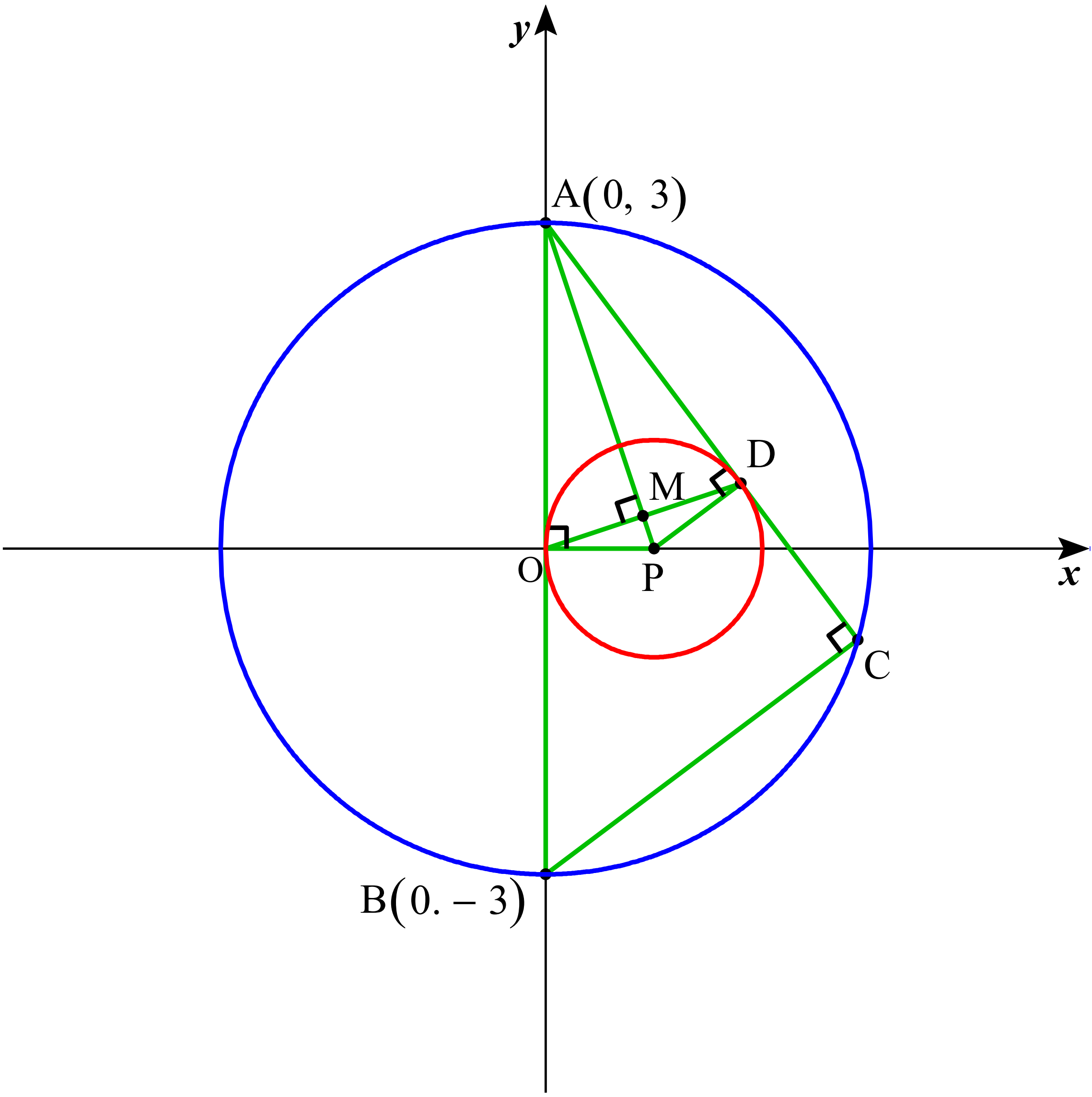
① 点Qは円Pの周上にある

② 点Pは内接円Qの内部にあり，点Qは円Pの内部にある

③ 点Pは内接円Qの内部にあり，点Qは円Pの外部にある

ポイント：図形と方程式でも処理できるよう，図形を座標平面上に表す。

xy 直交座標平面上に 2 円 $x^2+y^2=9$ と $(x-1)^2+y^2=1$ を描き，
前者を円 O，後者を円 P とする。すると，$\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{P}(1,0)$
また，$\mathrm{A}(0,3)$，$\mathrm{B}(0,-3)$，OD の中点を M とする。



AP

直角三角形 APB について，三平方の定理より，$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{AO}^2+\mathrm{OP}^2}=\sqrt{10}$

OD

△APO∽△AOM より，PO：OM＝AP：AO＝$\sqrt{10}$：3　$\therefore \mathrm{OM}=\dfrac{3\mathrm{PO}}{\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

よって，$\mathrm{OD}=2\mathrm{OM}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

cos∠OAD

△AOD について，余弦定理より，$\mathrm{OD}^2=\mathrm{AO}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{OAD}$

$$\begin{aligned}\therefore \cos\angle\mathrm{OAD}&=\frac{\mathrm{AO}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{OD}^2}{2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AD}}\\&=\frac{9+9-\dfrac{18}{5}}{2\cdot3\cdot3}\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

AC

∠C は直径の円周角だから，△ABC は∠C＝90° の直角三角形である。

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}&=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{OAD}\\&=6\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{5}\end{aligned}$$

△ABC の面積

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{OAD}&=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{OAD}}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

より，△ABC の面積は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{OAD}&=\frac{1}{2}\cdot6\cdot\frac{24}{5}\cdot\frac{3}{5}\\&=\frac{216}{25}\end{aligned}$$

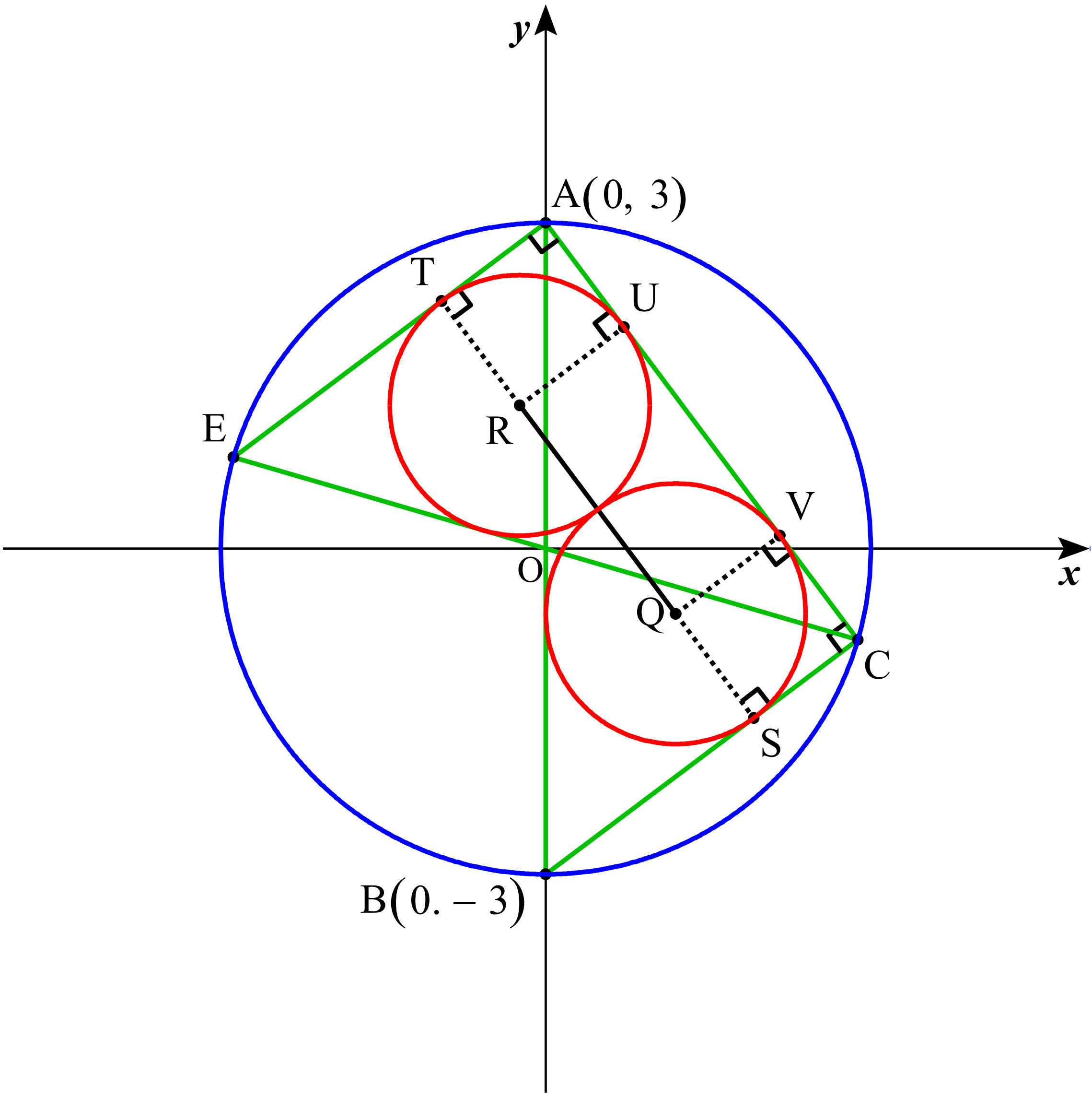
△ABC の内接円の半径

△ABC の内接円の半径を r とすると，△ABC の面積は r を用いて,

$$\begin{aligned}\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})&=\frac{r}{2}\left(6+\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{OAD}+\frac{24}{5}\right)\\&=\frac{r}{2}\left(6+6\cdot\frac{3}{5}+\frac{24}{5}\right)\\&=\frac{36r}{5}\end{aligned}$$

△ABC の面積$=\dfrac{216}{25}$ より，$\dfrac{36}{5}r=\dfrac{216}{25}\quad\therefore r=\dfrac{6}{5}$

(1)



QR

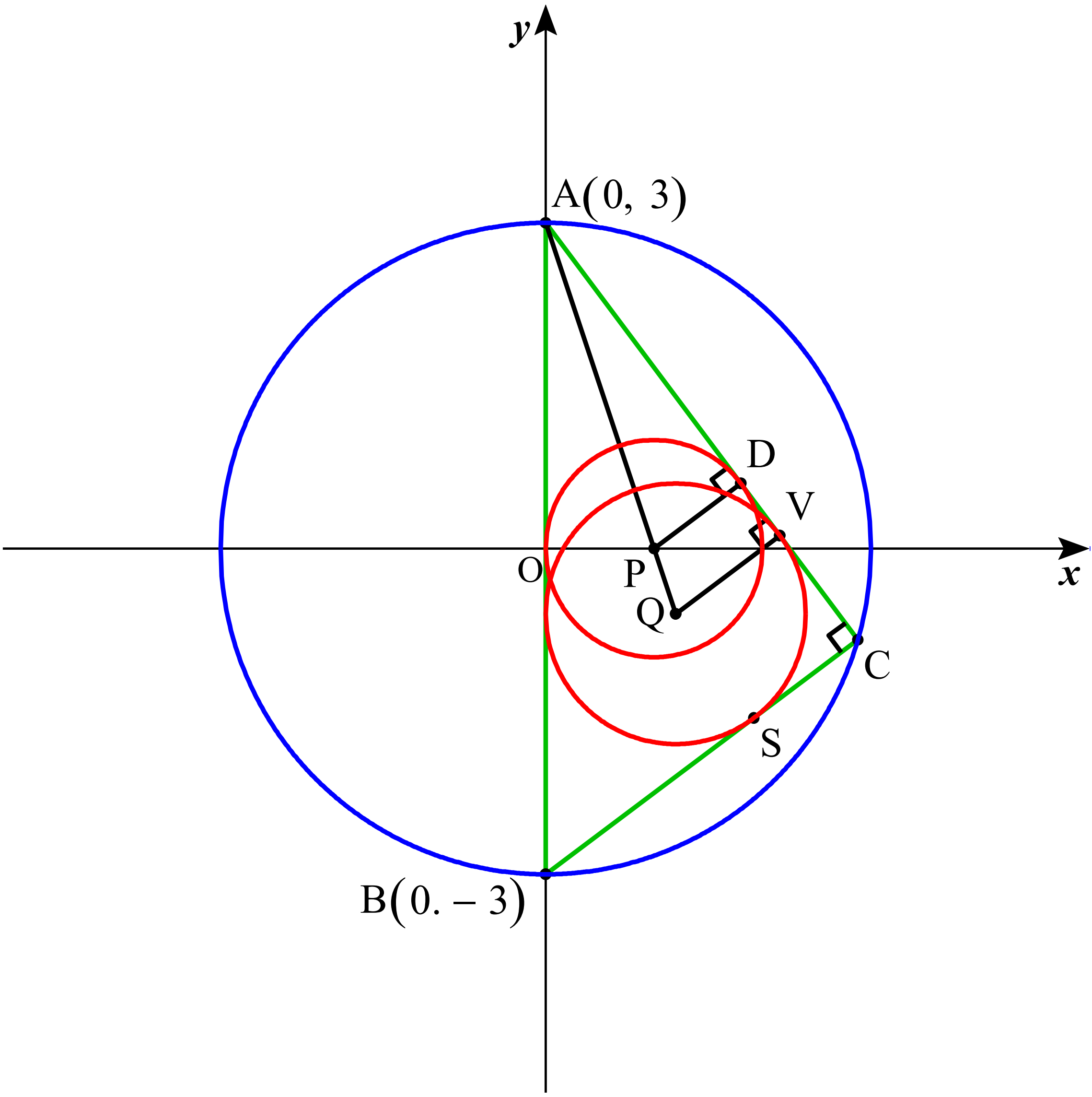
△ABC≡△CEA より，両内接円の半径はいずれも $\frac{6}{5}$ である。

よって，上図より，$\mathrm{QR}=\mathrm{AC}-(\mathrm{AC}+\mathrm{CV})=\mathrm{AC}-2\cdot\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$

内接円 Q と内接円 R

外接する。

(2)



AQ

△APD∽△AQV より，AP：AQ＝PD：QV＝1：$\frac{6}{5}$

これと $AP=\sqrt{10}$ より，　$AQ=\frac{6\sqrt{10}}{5}$

PQ

$PQ=AQ-AP=\frac{6\sqrt{10}}{5}-\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$